Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 Martie 2012

CLASA a IX-a

Problema 1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia

$$[x]^5 + \{x\}^5 = x^5.$$

Notă: prin $[x]$ *şi* $\{x\}$ *se notează partea întreagă, respectiv partea fracţionară a numărului real* x.

Problema 2. Demonstraţi că, dacă a, b, c sunt numere reale strict pozitive, atunci

$$\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{a+2b+c} + \frac{c}{a+b+2c} \leq \frac{3}{4}.$$

Gazeta Matematică

Problema 3. Un cerc care trece prin vârfurile B şi C ale unui triunghi ABC taie din nou laturile (AB) şi (AC) în N, respectiv M. Luăm punctele $P \in (MN)$, $Q \in (BC)$ astfel încât unghiurile $\angle BAC$ şi $\angle PAQ$ să aibă aceeaşi bisectoare.

a) Arătaţi că

$$\frac{PM}{PN} = \frac{QB}{QC}.$$

b) Arătaţi că mijloacele segmentelor $(BM), (CN), (PQ)$ sunt coliniare.

Problema 4. Un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere naturale este crescător, neconstant şi are proprietatea: a_n *divide* n^2*, oricare ar fi* $n \geq 1$. Arătaţi că una dintre următoarele afirmaţii este adevărată:

- există un număr natural n_1 astfel încât $a_n = n$ pentru orice $n \geq n_1$;
- există un număr natural n_2 astfel încât $a_n = n^2$ pentru orice $n \geq n_2$.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.